ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1984

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geqslant 2$ sur $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire hermitien linéaire par rapport à sa première variable et noté $(x \mid y)$ pour tout couple (x, y) d'éléments de E ; la norme de x associée à ce produit scalaire est notée $\| x \|$. Pour toute partie non vide K de E, on notera $K^{\perp}$ l'orthogonal de K, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel constitué des éléments de E orthogonaux à tous les éléments de K.

$\mathfrak{L}(E)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathfrak{L}(E)$, on note AB le composé $A \circ B$; si n est un entier naturel, A^n est l'élément de $\mathfrak{L}(E)$ défini par récurrence par $A^{n+1} = A^n A$, avec $A^0 = I$, application identique de E sur lui-même. Enfin, A^* est l'adjoint de A, et $| A |$ est l'élément, a priori de $\mathbb{R} \cup \{ +\infty \}$, égal à la borne supérieure des $\| A(x) \|$ pour l'ensemble des $x \in E$ de norme 1.

I

Dans cette partie, S est un endomorphisme de E tel que $I - S^* S$ soit de rang 1 et φ est la forme hermitienne égale pour tout $x \in E$ à $\varphi(x) = \| x \|^2 - \| S(x) \|^2$.

D'autre part, pour tout élément y non nul de E, on note A_y l'endomorphisme défini sur E par $A_y(x) = (x \mid y)\, y$.

1 - ***a.*** S peut-il être unitaire ? La forme hermitienne φ peut-elle être identiquement nulle ?

b. Combien l'endomorphisme $S^* S$ possède-t-il de valeurs propres distinctes ? Indiquer pour chacune d'elles sa valeur dans $\mathbb{C}$ ou les limitations que les hypothèses imposent à sa valeur dans $\mathbb{C}$.

c. Quelles sont les dimensions et les relations mutuelles des sous-espaces propres correspondants ?

2 - *Dans toute la suite*, on suppose que la forme hermitienne φ est *positive.*

a. Calculer $| S |$.

b. Montrer que φ est le carré du module d'une forme linéaire sur E et qu'il existe un élément y non nul de E tel que $I - S^* S = A_y$. Pour quels $y' \in E$ a-t-on $A_{y'} = A_y$?

c. Comparer $\| y \|$ à 1.

d. Montrer que pour tout $x \in \{ y \}^{\perp}$, on a $\| S(x) \| = \| x \|$.

e. On considère l'ensemble des modules des valeurs propres de tous les endomorphismes $S' \in \mathfrak{L}(E)$ tels que $I - S'^* S' = A_y$. Quels sont le plus grand et le plus petit des éléments de cet ensemble ?

.../...

3 - Dans cette question, on suppose en outre que S n'est pas inversible.

a. Quel est le noyau de S ?

b. Calculer $\| y \|$. Quelle définition géométrique peut-on donner de A_y ? Quelles sont les valeurs propres de $S^* S$?

c. Comparer l'image de S et le noyau de S^* respectivement au noyau et à l'image de $I - SS^*$.

d. Montrer qu'il existe un élément $z \in E$, dont on précisera la direction et la norme, tel que $I - SS^* = A_z$. Quelles sont les valeurs propres de SS^* et les sous-espaces propres correspondants ?

4 - Dans cette question, on suppose au contraire que S est inversible.

a. Comparer $\| y \|$ à 1 . Quelles sont les valeurs propres de $S^* S$?

b. Déterminer l'image et le noyau de $I - SS^*$.

c. Déterminer un élément w de E tel que $I - SS^* = A_w$ et comparer les normes de w et de y . Quelles sont les valeurs propres de SS^* et les sous-espaces propres correspondants ? Comment déduit-on ces sous-espaces propres des sous-espaces propres de $S^* S$?

5 - *Dans cette seule question*, on suppose que $n = 2$ et que E est rapporté à une base orthonormée (e_1 , e_2) ; on donne en outre un élément non nul $y \in E$, colinéaire à e_2 et tel qu'il existe un endomorphisme S_0 de E vérifiant $I - S^*_0 S_0 = A_y$. En se bornant aux $S_1 \in \mathcal{L}(E)$ dont les matrices relatives à la base (e_1 , e_2) sont réelles, trouver ces matrices pour tous les S_1 tels que $I - S^*_1 S_1 = A_y$.

II

1 - Soient T un élément de $\mathcal{L}(E)$ et ψ la forme hermitienne égale pour tout $x \in E$ à $\psi(x) = \| x \|^2 - \| T(x) \|^2$.

a. Montrer que le noyau de $I - T^* T$ est inclus dans l'ensemble $\psi^{-1}(0)$ des éléments $x \in E$ qui annulent ψ .

b. Montrer par un exemple en dimension $n = 2$ que cette inclusion peut être stricte.

c. Dans toute la suite, on suppose $| T | \leqslant 1$. Si $k > 0$ est le rang de $I - T^* T$, montrer que ψ est la somme des carrés des modules de k formes linéaires sur E et qu'il existe k vecteurs $y_j \in E$ orthogonaux deux à deux tels que

$$I - T^* T = \sum_{j=1}^{k} A_{y_j} .$$

Comparer $\| y_j \|$ à 1 . Comparer $\psi^{-1}(0)$ au noyau de $I - T^* T$.

.../...

2 - Dans cette question, on suppose que $| T^n | = 1$.

a. Montrer qu'il existe un vecteur unitaire $x_0 \in E$ tel que $\| T^n (x_0) \| = 1$.

b. Montrer que pour tous les entiers $p = 0 , \ldots , n - 1$, le vecteur $T^p (x_0)$ appartient au noyau de $I - T^* T$.

c. Montrer que le sous-espace vectoriel V_0 de E engendré par les n vecteurs $T^p (x_0)$ en question est stable par T ; en déduire que T admet au moins une valeur propre de module 1 . Comparer à 1 les modules des autres valeurs propres de T .

3 - On suppose dans cette question que toutes les valeurs propres de T sont de module strictement inférieur à 1 et que $| T^{n-1} | = 1$. Etablir l'existence de $x_1 \in E$ tel que le sous-espace vectoriel V_1 engendré par les vecteurs $T^j (x_1)$, où j décrit l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, coïncide avec E , et en déduire qu'il existe une base de E pour laquelle la matrice de T est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & & & & 0 & . \\ 0 & 1 & . & & & . & . \\ . & 0 & . & . & & . & . \\ . & & . & . & 0 & 0 & . \\ 0 & & & 0 & 1 & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i = 1 , \ldots , n$. Quel est, indépendamment de toute base, le rôle des nombres complexes α_i vis-à-vis de T ?

III

Soit T un endomorphisme de E tel que $| T | \leqslant 1$, $| T^{n-1} | = 1$, et dont toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1 . On suppose de plus que $I - T^* T$ est de rang 1 et, pour tout entier $p \geqslant 0$, on note ψ_p la forme hermitienne égale pour tout $x \in E$ à $\psi_p (x) = \| x \|^2 - \| T^p (x) \|^2$, avec $T^0 = I$.

1 - Montrer que ψ_n est définie positive et que, pour tout entier $p \in [0, n - 1]$, ψ_p est dégénérée mais positive.

2 - Pour les entiers $p \in [1, n]$, exprimer la différence $\psi_p - \psi_{p-1}$ à l'aide du carré du module d'une forme linéaire sur E . En déduire une expression de ψ_p à l'aide de carrés de modules de formes linéaires.

3 - Pour les entiers $p \in [1, n]$, quel est le rang de $I - T^{*p} T^p$ et quelle est la dimension du noyau de ψ_p ?

♦
♦ ♦